ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

Ηλεκτρικό πεδίο. Δυναμικό. Νόμος του Gauss.

ΙΙ. 1 Δώδεκα ίσα φορτία q βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού δωδεκαγώνου.

(α) Ποια είναι η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα δοκιμαστικό φορτίο Q, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο του πολυγώνου;

(β) Υποθέστε ότι ένα από τα φορτία απομακρύνεται. Ποια θα είναι τότε η δύναμη πάνω στο Q; Εξηγήστε προσεκτικά τον συλλογισμό σας.

ΙΙ. 2 (α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο (μέτρο και φορά) σε σημείο που βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο της ευθείας που ενώνει δύο ίσα φορτία q. Τα φορτία απέχουν μεταξύ τους απόσταση d, και η απόσταση του σημείου από την ευθεία των δύο φορτίων είναι z. Ελέγξετε αν το αποτέλεσμά σας συμφωνεί με εκείνο που θα περιμένατε για $z>>d$.

(β) Επαναλάβετε το μέρος (α), με το δεξιό φορτίο ίσο με $-q$ αντί $+q$.

ΙΙ. 3 Μια λεπτή ράβδος μήκους l, ομοιόμορφα φορτισμένη με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ, βρίσκεται πάνω στο άξονα x, με το ένα της άκρο στο σημείο $x=0$ και το άλλο στο $x=l$.

(α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η κατανομή σε σημείο P του άξονα δεξιά της ράβδου, στη θέση x_P (με $x_P > l$).

(β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό της κατανομής στο ίδιο σημείο.

ΙΙ. 4 Μία λεπτή μη αγώγιμη ράβδος λυγίζεται, ώστε να πάρει τη μορφή ενός σχεδόν πλήρους κύκλου ακτίνας 0,5 m. Μεταξύ των άκρων υπάρχει ένα μικρό διάκενο 2 cm. Ένα θετικό φορτίο 10^{-9} C απλώνεται ομοιόμορφα σε όλο το μήκος της ράβδου. Ποιο είναι το μέτρο και η φορά του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του κύκλου;

ΙΙ. 5 (α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε κατακόρυφη απόσταση z πάνω από το κέντρο ενός κυκλικού βρόχου ακτίνας r που είναι φορτισμένος ομοιόμορφα, με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ.

(β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε κατακόρυφη απόσταση z πάνω από το κέντρο ενός επίπεδου κυκλικού δίσκου ακτίνας R, που είναι φορτισμένος ομοιόμορφα, με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Τι θα προκύψει στο όριο $R \to \infty$;

(γ) Και στις δύο περιπτώσεις, (α) και (β), βρείτε τη μορφή των αποτελεσμάτων για πολύ μεγάλα z.

ΙΙ. 6 Λεπτός κυκλικός δίσκος ακτίνας R έχει επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = kr$, όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο του δίσκου και k μια σταθερά.

(α) Βρείτε το ολικό φορτίο του δίσκου.

(β) Βρείτε το δυναμικό σε ένα σημείο που βρίσκεται σε απόσταση z από τον δίσκο, και πάνω στον άξονα που είναι κάθετος στο δίσκο στο κέντρο του.

(γ) Βρείτε ο ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον άξονα του δίσκου.

ΙΙ. 7 Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}} = -y^2 z\hat{\mathbf{i}} - 2xyz\hat{\mathbf{j}} - xy^2\hat{\mathbf{k}}$.

(α) Υπολογίστε το στροβιλισμό του ηλεκτρικού πεδίου.

(β) Βρείτε την πυκνότητα φορτίου στο χώρο.

(γ) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_o^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}}$ από το σημείο O(0,0,0) στο σημείο B(x_1, y_1, z_1). Ακολουθήστε τη διαδρομή κατά μήκος των τριών ευθειών:

(1) από το σημείο O(0,0,0) στο σημείο P(0, y_1,0), (για την οποία τα x και z είναι σταθερά και επομένως $dx = 0$, $dz = 0$.)

(2) από το σημείο P(0, y_1,0) στο σημείο Q(x_1, y_1,0), (για την οποία τα y και z είναι σταθερά και επομένως $dy = 0$, $dz = 0$.)

(3) από το σημείο Q(x_1, y_1,0) στο σημείο B(x_1, y_1, z_1). (για την οποία τα x και y είναι σταθερά και επομένως $dx = 0$, $dy = 0$.).)

Υπενθυμίζεται ότι $d\vec{\mathbf{l}} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}$.

(δ) Ποια είναι η συνάρτηση δυναμικού V, με σημείο αναφοράς το O(0,0,0);

Π. 8 Μια άπειρη επίπεδη πλάκα εκτείνεται στο χώρο $-a < x < a$. Η πυκνότητα φορτίου μέσα στην πλάκα είναι $\rho = k|x|$, όπου k μια θετική σταθερά. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου. Σχεδιάστε το E_x ως συνάρτηση του x.

Π. 9 Ένα απείρων διαστάσεων επίπεδο έχει στην επιφάνειά του ομοιόμορφη κατανομή φορτίου, επιφανειακής πυκνότητας σ. Σε επαφή με το επίπεδο, υπάρχει μία απέραντη στρώση φορτίου, που έχει πάχος d και ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα ρ. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου.

Π. 10 Η περιοχή $a \le r \le b$ περιέχει φορτίο με χωρική πυκνότητα $\rho(r) = A/r$, όπου r η απόσταση από την αρχή των αξόνων, και A μια σταθερά. Στο κέντρο, $r = 0$, υπάρχει ένα σημειακό φορτίο Q.

(α) Ποια πρέπει να είναι η τιμή του A, ώστε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή $a \le r \le b$ να έχει σταθερό μέτρο;

(β) Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές $r \le a$ και $r \ge b$;

(γ) Σχεδιάστε το $|\vec{\mathbf{E}}|$ ως συνάρτηση του r.

Π. 11 Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο που δημιουργεί ομοιόμορφη κυλινδρική κατανομή φορτίου ακτίνας α απείρου μήκους και χωρικής πυκνότητας ρ.

Αποδείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο *έξω* από την κατανομή είναι το ίδιο με το πεδίο που θα δημιουργούσε στο ίδιο σημείο το ίδιο συνολικό φορτίο αν ήταν ομοιόμορφα γραμμικά κατανεμημένο κατά μήκος του άξονα της κατανομής.

Π. 12 Σε περιοχή όπου επικρατεί ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}} = Cxy\hat{\mathbf{i}}$ (C μια θετική σταθερά), θεωρήστε την κλειστή επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $0 \le x \le \alpha$, $0 \le y \le \beta$, $0 \le z \le \gamma$.

(α) Δείξετε ότι η ηλεκτρική ροή μέσα από την επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου είναι ίση με $\Phi = \frac{1}{2}\alpha\beta^2\gamma C$.

(β) Βρείτε την πυκνότητα φορτίου $\rho(x, y, z,)$ σε όλο το χώρο.

(γ) Βρείτε το ολικό φορτίο που περικλείεται από το παραλληλεπίπεδο, με δύο τρόπους.

(δ) Είναι διατηρητικό το πεδίο;

Π. 13 Υποθέστε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε κάποια περιοχή έχει βρεθεί να είναι $\vec{\mathbf{E}} = kr^3\hat{\mathbf{r}}$ όπου $\vec{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}}$ είναι το διάνυσμα θέσης ως προς το σημείο O(0,0,0) και k μια θετική σταθερά.

(α) Βρείτε την πυκνότητα φορτίου ρ.

(β) Βρείτε το ολικό φορτίο που περιέχεται σε μια σφαίρα ακτίνας R με κέντρο το σημείο Ο. Υπολογίστε το με δύο διαφορετικούς τρόπους.

[Δίνεται η απόκλιση διανύσματος σε σφαιρικές συντεταγμένες, όταν υπάρχει σφαιρική συμμετρία (δηλ. $\vec{\mathbf{E}} = E_r\hat{\mathbf{r}}$): $\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 E_r\right)$].

Π. 14 Το πεδίο σε ένα χώρο περιγράφεται από το δυναμικό $V(x,y,z) = -\frac{A}{3}x^3 - By$, όπου A και B είναι σταθερές.

(α) Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο;

(β) Ποια είναι η πυκνότητα φορτίου ρ;

(γ) Πόσο έργο απαιτείται για τη μεταφορά ενός σημειακού φορτίου Q από το σημείο (2,3,0) στο σημείο (-1,2,0);

(δ) Πόσο φορτίο περικλείεται στον κύβο $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$;

Ηλεκτροστατική ενέργεια. Αγωγοί. Διηλεκτρικά.

Π. 15 Τρία φορτία, Q, Q και $-2Q$, βρίσκονται στο επίπεδο xy και στις θέσεις (a, a), $(-a, a)$ και $(0, -a)$ αντίστοιχα ($Q>0$, $a>0$). Να βρεθούν:

(α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο (0,0,0).

(β) Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο (0,0,0).

(γ) Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος.

(δ) Η διπολική ροπή του συστήματος των φορτίων.

Π. 16 Βρείτε την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε μια ομοιόμορφη φορτισμένη συμπαγή σφαίρα ακτίνας R και ολικού φορτίου q. Υπολογίστε το με δύο διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας:

(α) τη σχέση $W = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau$, και (β) τη σχέση $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\chi\omega\rho o\varsigma} E^2 d\tau$.

Π. 17 Υπολογίστε την ενέργεια μιας σφαίρας, ομοιόμορφα φορτισμένης με ολικό φορτίο q, ως εξής: Συναρμολογήστε τη σφαίρα κατά στρώματα, φέρνοντας κάθε φορά ένα απειροστό φορτίο dq από το άπειρο και απλώνοντάς το ομοιόμορφα πάνω στην επιφάνεια, αυξάνοντας έτσι σιγά-σιγά την ακτίνα.

(α) Πόσο έργο dW απαιτείται για να αυξηθεί η ακτίνα από r σε $r + dr$;

(β) Ολοκληρώστε για να βρείτε το έργο που απαιτείται για τη συναρμολόγηση ολόκληρης της σφαίρας, ακτίνας R.

Π. 18 Ένας πυκνωτής παραλλήλων οπλισμών επιφάνειας A, έχει χωρητικότητα $C = \varepsilon_0\frac{A}{a}$, όπου a είναι η απόσταση των οπλισμών. Οι δύο οπλισμοί είναι φορτισμένοι με φορτία $\pm Q$ και έλκονται μεταξύ τους. Ο ένας οπλισμός αφήνεται να πλησιάσει τον άλλο κατά μια απειροστή απόσταση δ, ενώ τα φορτία στους οπλισμούς διατηρούνται σταθερά.

(α) Υπολογίστε τη μεταβολή της ενέργειας του πυκνωτή ($Q^2/2C$) λόγω της μετατόπισης και δείξετε ότι είναι ανάλογη του δ.

(β) Από το αποτέλεσμα του (α), υπολογίστε τη δύναμη που ασκεί ο ένας οπλισμός πάνω στον άλλο.

(γ) Από το αποτέλεσμα του (β), υπολογίστε την πίεση (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας), που ασκείται στους οπλισμούς, συναρτήσει της έντασης E του ηλεκτρικού πεδίου.

Π. 19 Μέσα σε έναν αγωγό που εκτείνεται στο άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις, υπάρχει μια σφαιρική κοιλότητα ακτίνας R_2. Ο αγωγός έχει μηδενικό δυναμικό. Μια συμπαγής μεταλλική σφαίρα ακτίνας R_1 τοποθετείται στο κέντρο της κοιλότητας, ομόκεντρη με αυτήν. Η σφαίρα φορτίζεται με φορτίο Q. Να βρεθούν:

(α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου.

(β) Η δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου.

(γ) Η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος. (Χρησιμοποιήστε τον ευκολότερο, για σας, από τους τρεις τρόπους που έχουμε αναπτύξει.)

Π. 20 Μια συμπαγής μεταλλική σφαίρα ακτίνας R, που φέρει φορτίο q, περιβάλλεται από ένα παχύ ομόκεντρο μεταλλικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής ακτίνας b, $(R < a < b)$. Το κέλυφος δεν φέρει φορτίο.

(α) Βρείτε τις επιφανειακές πυκνότητες φορτίου στο R, στο a και στο b.

(β) Βρείτε το δυναμικό στο κέντρο χρησιμοποιώντας ως σημείο αναφοράς το άπειρο.

Π. 21 Θεωρούμε μια κατανομή φορτίου με σταθερή (θετική) χωρική πυκνότητα $\rho = \rho_0$ στην περιοχή $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, ενώ $\rho = 0$ έξω από αυτήν την άπειρη πλάκα. Σε καθεμιά από τις δύο πλευρές της φορτισμένης πλάκας, εφάπτεται ένα φύλλο διηλεκτρικού με πάχος d, και άπειρες τις άλλες δύο διαστάσεις. Η διηλεκτρική σταθερά του φύλλου είναι K.

(α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου και να παρασταθεί γραφικά.

(β) Να βρεθεί το δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου, παίρνοντας ως επιφάνεια αναφοράς το επίπεδο xy, και να παρασταθεί γραφικά.

Π. 22 Συμπαγής αγώγιμος κύλινδρος άπειρου μήκους και ακτίνας R_1 είναι θετικά φορτισμένος με συνολικό φορτίο ανά μονάδα μήκους λ. Ο αγωγός περιβάλλεται σε όλο του το μήκος από διηλεκτρικό υλικό με διηλεκτρική σταθερά K, σε σχήμα κυλινδρικού φλοιού με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2.

(α) Να βρεθεί και να παρασταθεί γραφικά το ηλεκτρικό πεδίο E ως συνάρτηση της απόστασης r από τον άξονα του κυλίνδρου.

(β) Εκφράστε τις επιφανειακές πυκνότητες σ_δ των δέσμιων φορτίων στις δύο επιφάνειες του διηλεκτρικού, και τη χωρική πυκνότητα ρ_δ του δέσμιου φορτίου στο εσωτερικό του.

(Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, όταν υπάρχει αξονική συμμετρία, είναι $\nabla \cdot \vec{\mathbf{P}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_r)$.)

Π. 23 Ο χώρος μεταξύ δύο ομόκεντρων μεταλλικών σφαιρικών φλοιών που έχουν ακτίνες R_1 και R_2 $(R_1 < R_2)$, είναι γεμάτος με διηλεκτρικό υλικό του οποίου η διηλεκτρική σταθερά μεταβάλλεται με την απόσταση r από το κέντρο σύμφωνα με τη σχέση $K = ar$, όπου a είναι μια θετική σταθερά. Ο εσωτερικός φλοιός φορτίζεται με θετικό φορτίο $+Q$, και ο εξωτερικός με φορτίο - Q.

(α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου.

(β) Να βρεθεί το δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου.

(γ) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή που σχηματίζουν οι δύο φλοιοί.

Π. 24 Μέσα στο πεδίο ενός σημειακού φορτίου q, και σε απόσταση r από αυτό, τοποθετείται ουδέτερο άτομο πολωσιμότητας α. Πόση είναι η δύναμη έλξης μεταξύ τους; Υποθέστε ότι οι διαστάσεις του ατόμου είναι μικρές σε σύγκριση με την r, ώστε το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή του ατόμου να μπορεί να θεωρηθεί ομογενές.

Π. 25 Ένας πυκνωτής έχει παράλληλους επίπεδους οπλισμούς εμβαδού A που απέχουν μεταξύ τους απόσταση α. Ανάμεσα στους οπλισμούς υπάρχει διηλεκτρικό του οποίου η διηλεκτρική σταθερά μεταβάλλεται με την απόσταση x από τον ένα οπλισμό σύμφωνα με τη σχέση $K = K_1 + \frac{x}{a}(K_2 - K_1)$, (δηλαδή γραμμικά με την απόσταση, από την τιμή K_1 στον ένα οπλισμό, στην τιμή K_2 στον άλλο). Στους οπλισμούς υπάρχουν φορτία $\pm Q$.

(α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του εσωτερικού του πυκνωτή. (Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Gauss, υποθέτοντας ότι το πεδίο είναι παντού κάθετο στο επίπεδο των οπλισμών και μηδέν έξω από τον πυκνωτή).

(β) Υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς.

(γ) Υπολογίστε έτσι τη χωρητικότητα του πυκνωτή.

Παίρνετε το αναμενόμενο αποτέλεσμα όταν $K_1 = K_2$;

Π. 26 Ένας κύλινδρος από διηλεκτρικό, διατομής εμβαδού A και μήκους L, είναι πολωμένη κατά μήκος του άξονά του, έτσι ώστε η πόλωσή του να δίνεται από τη σχέση $P_x = ax^2 + b$, όπου x είναι η απόσταση από το ένα άκρο του κυλίνδρου.

(α) Βρείτε τις πυκνότητες ρ_b και σ_b των δέσμιων φορτίων στο διηλεκτρικό.

(β) Υπολογίστε το ολικό δέσμιο φορτίο στον κύλινδρο και δείξετε ότι είναι ίσο με μηδέν.

Νόμος των Biot-Savart.

Π. 27 Βρόχος έχει σχήμα κανονικού εξαγώνου πλευράς α και διαρρέεται από ρεύμα I. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε σημείο πάνω στην ευθεία που περνά από το κέντρο του εξαγώνου και είναι κάθετη στο επίπεδό του. Θεωρήστε γνωστό το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε ευθύγραμμο τμήμα αγωγού, σε σημεία πάνω στη μεσοκάθετό του.

Π. 28 Σύμφωνα με το μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου, το άτομο αυτό αποτελείται από ένα ηλεκτρόνιο με φορτίο $-e$ και μάζα m, που κινείται με ταχύτητα $\upsilon = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2} \approx \frac{c}{137}$ πάνω σε κυκλική τροχιά ακτίνας $a_0 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}53 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ γύρω από ένα πρωτόνιο με φορτίο $+e$.

(α) Δείξετε ότι το κινούμενο ηλεκτρόνιο ισοδυναμεί με ηλεκτρικό ρεύμα μέσης τιμής ίσης με $I = \frac{\upsilon e}{2\pi a_0}$.

(β) Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο B στον πυρήνα, που οφείλεται στην κίνηση του ηλεκτρονίου. Υπενθυμίζεται ότι το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός κυκλικού βρόχου ακτίνας α, που διαρρέεται από ρεύμα I, είναι $B = \frac{\mu_0 I}{2a}$.

(γ) Βρείτε το λόγο του μαγνητικού πεδίου προς το ηλεκτρικό πεδίο του ηλεκτρονίου στον πυρήνα Δίνεται ότι $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Π. 29 Μια άπειρη πλάκα *πολύ μικρού* πάχους δ, που βρίσκεται στο επίπεδο xz και εκτείνεται από το $x=-a$ μέχρι το $x=+a$, διαρρέεται από συνολικό ομογενές ρεύμα I, προς τα θετικά z.

Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό της πλάκας, σε ένα σημείο πάνω στον άξονα των y, σε απόσταση a από την πλάκα.

Π. 30 Μία πολύ λεπτή ευθύγραμμη ράβδος μήκους $2a$, είναι φορτισμένη ομοιόμορφα με ολικό φορτίο Q. Η ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα υ ($\upsilon << c$) κατά μήκος του άξονα των x, με τον οποίο και συμπίπτει. Τη χρονική στιγμή που το κέντρο της ράβδου βρίσκεται στο σημείο (0,0,0):

(α) Θεωρήστε τη ράβδο ως ισοδύναμη με ρεύμα I μεταξύ $x=-a$ και $x=+a$. Υπολογίστε την τιμή του I.

(β) Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί η ράβδος στο σημείο $(0, a, 0)$ του άξονα των y.

(γ) Υπολογίστε τη μαγνητική δύναμη $F_{\mu\alpha\gamma\nu}$ που ασκεί η ράβδος σε ένα φορτίο Q που βρίσκεται στο σημείο $(0, a, 0)$ και κινείται με ταχύτητα υ, απομακρυνόμενο από τη ράβδο.

(δ) Βρείτε το λόγο της μαγνητικής δύναμης πάνω στο φορτίο, προς την ηλεκτρική δύναμη $F_{\eta\lambda} = \dfrac{Q^2}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^2}$ που θα ασκούσε η ράβδος πάνω σε ένα ακίνητο φορτίο Q στο ίδιο σημείο. Εκφράστε το αποτέλεσμά σας συναρτήσει του λόγου υ/c. Δίνεται ότι $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Π. 31 Πολύ λεπτός κυκλικός δίσκος ακτίνας R, είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με ολικό φορτίο Q. Ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο του άξονα, σε απόσταση z από το κέντρο του δίσκου.

Υπόδειξη: Θεωρήστε ένα δακτύλιο του δίσκου μεταξύ των ακτινών r και $r+\mathrm{d}r$. Βρείτε το ρεύμα με το οποίο ισοδυναμεί το περιστρεφόμενο φορτίο του δακτυλίου αυτού και το μαγνητικό πεδίο που προκαλεί πάνω στον άξονα του δίσκου. Είναι γνωστό ότι το μαγνητικό πεδίο δακτυλίου ακτίνας r, που διαρρέεται από ρεύμα I, σε σημείο του άξονά του που απέχει απόσταση z από το κέντρο του είναι ίσο με $B = \dfrac{\mu_0 I}{2}\dfrac{r^2}{(z^2+r^2)^{3/2}}$.

Π. 32 (α) Τμήμα αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα I έχει σχήμα ημικυκλίου ακτίνας a με διάμετρο ευθεία ΑΒ. Το ημικύκλιο βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}}$ που είναι κάθετο στο επίπεδό του. Βρείτε τη δύναμη που ασκείται πάνω στο ημικύκλιο και δείξετε ότι είναι ίση με τη δύναμη που θα ασκούσε το πεδίο πάνω σε ευθύγραμμο αγωγό κατά μήκος της ευθείας ΑΒ, που διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα.

(β) Διερευνήστε κατά πόσο το ίδιο ισχύει για αγωγό οποιουδήποτε σχήματος μεταξύ των σημείων Α και Β, ο οποίος βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στο $\vec{\mathbf{B}}$.

Νόμος του Ampère.

Π 33 Συμπαγής κυλινδρικός αγωγός απείρου μήκους και ακτίνας a, ο άξονας του οποίου συμπίπτει με τον άξονα z, διαρρέεται από ολικό ρεύμα I, του οποίου η πυκνότητα δίνεται από τη σχέση $\vec{\mathbf{J}}(r)=J_0\frac{r}{a}\hat{\mathbf{z}}$, όπου r είναι η απόσταση από τον άξονα z, και J_0 μια σταθερά.

(α) Να υπολογιστεί η τιμή του J_0 συναρτήσει των a και I.

(β) Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}}$ σε όλα τα σημεία του χώρου, συναρτήσει των I και r, και να παρασταθεί γραφικά το μέτρο του ως συνάρτηση του r.

Π. 34 Συμπαγής κυλινδρικός αγωγός απείρου μήκους και ακτίνας a, ο άξονας του οποίου συμπίπτει με τον άξονα z, διαρρέεται από ολικό ρεύμα I, του οποίου η πυκνότητα δίνεται από τη σχέση $\vec{\mathbf{J}}(r)=J_0\left(1-\frac{r}{a}\right)\hat{\mathbf{z}}$, όπου r είναι η απόσταση από τον άξονα z, και J_0 μια σταθερά.

(α) Να υπολογιστεί η τιμή του J_0 συναρτήσει των a και I.

(β) Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}}$ σε όλα τα σημεία του χώρου, συναρτήσει των I και r, και να παρασταθεί γραφικά το μέτρο του ως συνάρτηση του r.

Π. 35 Συμπαγής κυλινδρικός αγωγός ακτίνας R διαρρέεται από ολικό ρεύμα I. Ένας δεύτερος αγωγός περιβάλλει τον πρώτο και καταλαμβάνει το χώρο μεταξύ των ακτινών R και $2R$. Ο δεύτερος αγωγός διαρρέεται και αυτός από ολικό ρεύμα I, με φορά αντίθετη από αυτήν του ρεύματος του πρώτου αγωγού. Οι πυκνότητες ρεύματος είναι σταθερές στον κάθε ένα από τους δύο αγωγούς, και έχουν μέτρα J_1 και J_2 αντίστοιχα.

(α) Να υπολογιστούν οι τιμές των J_1 και J_2 συναρτήσει των R και I.

(β) Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}}$ σε όλα τα σημεία του χώρου, μέσα και έξω από τους αγωγούς και να παρασταθεί γραφικά το μέτρο του ως συνάρτηση της απόστασης r από τον άξονα του αγωγού.

Π. 36 Κοίλος αγώγιμος κύλινδρος εκτείνεται στο άπειρο και πρὸς τις δύο κατευθύνσεις, έχει εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική ακτίνα R_2, και διαρρέεται από ρεύμα I, ομοιόμορφα κατανεμημένο στη διατομή του.

(α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε όλα τα σημεία του χώρου.

(β) Δείξετε ότι, για αποστάσεις από τον άξονα του κυλίνδρου μεγαλύτερες από R_2, το μαγνητικό πεδίο είναι το ίδιο με το πεδίο που θα υπήρχε αν όλο το ρεύμα διέρρεε λεπτό αγωγό κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου.

Επαγωγή, αυτεπαγωγή. Μαγνητική ενέργεια.

Π. 37 Κυκλικός αγώγιμος δακτύλιος ακτίνας a κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}=\upsilon\hat{\mathbf{i}}$ προς τα θετικά x. Το επίπεδο του δακτυλίου διατηρείται κάθετο στον άξονα x. Για $t=0$ ο δακτύλιος βρίσκεται στο επίπεδο $x=0$. Στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}}=Cx^2\hat{\mathbf{i}}$, όπου C είναι θετική σταθερά.

(α) Να υπολογιστεί η επαγόμενη στο δακτύλιο ηλεκτρεγερτική δύναμη ως συνάρτηση του χρόνου.

(β) Αν η ωμική αντίσταση του δακτυλίου είναι R, να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας στο δακτύλιο κατά το χρονικό διάστημα $t=0$ ώς T.

(γ) Είναι δυνατό να υπάρξει ένα τέτοιο μαγνητικό πεδίο στη φύση;

Π. 38 Αγώγιμος βρόχος τετραγωνικού σχήματος κινείται στο επίπεδο xy με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}} = \upsilon\hat{\mathbf{i}}$ προς τα θετικά x. Οι πλευρές του τετραγώνου έχουν μήκος a και είναι παράλληλες προς τους άξονες x και y αντίστοιχα. Για $t = 0$ είναι $x = 0$, όπου x είναι η θέση της προπορευόμενης πλευράς του πλαισίου. Στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}} = Cx\hat{\mathbf{k}}$, όπου C είναι θετική σταθερά.

(α) Να υπολογιστεί η επαγόμενη στο δακτύλιο ηλεκτρεγερτική δύναμη ως συνάρτηση του χρόνου.

(β) Αν η ωμική αντίσταση του δακτυλίου είναι R, να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας στο δακτύλιο κατά το χρονικό διάστημα $t = 0$ ώς T.

(γ) Είναι δυνατό να υπάρξει ένα τέτοιο μαγνητικό πεδίο στη φύση;

Π. 39 Κυκλικός αγώγιμος βρόχος ακτίνας a βρίσκεται στο επίπεδο xy. Στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{k}}$. Το κέντρο του βρόχου παραμένει ακίνητο, ενώ το a μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $a(t) = a_0\sqrt{1+\sin\omega t}$ όπου B, a_0 και ω είναι θετικές σταθερές.

(α) Να υπολογιστεί η επαγόμενη στο δακτύλιο ηλεκτρεγερτική δύναμη ως συνάρτηση του χρόνου.

(β) Αν η ωμική αντίσταση του δακτυλίου είναι σταθερή και ίση με R, να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας στο δακτύλιο κατά το χρονικό διάστημα $t = 0$ ώς $T = 2\pi/\omega$.

Π. 40 Ευθύγραμμος αγωγός που εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις, διαρρέεται από μεταβλητό ρεύμα $I(t) = I_0 e^{-\beta t}$, όπου I_0 και β είναι θετικές σταθερές.

Ένας επίπεδος αγώγιμος βρόχος σχήματος τετραγώνου έχει δύο από τις πλευρές του παράλληλες προς τον ευθύγραμμο αγωγό. Ο αγωγός και ο βρόχος βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Οι πλευρές του τετραγώνου έχουν μήκος a. Η πλησιέστερη στον αγωγό πλευρά του βρόχου απέχει από αυτόν απόσταση ίση με b.

(α) Υπολογίστε την ΗΕΔ που επάγεται στο πλαίσιο. (Η αυτεπαγωγή του πλαισίου είναι αμελητέα).

(β) Αν η ωμική αντίσταση του δακτυλίου είναι R, να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας στο δακτύλιο κατά το χρονικό διάστημα $t = 0$ ώς ∞.

Π. 41 Δύο πηνία έχουν συντελεστές αυτεπαγωγής L_1 και L_2 αντίστοιχα. Βρείτε την αυτεπαγωγή L του συστήματος των δύο πηνίων, όταν αυτά συνδεθούν: (α) σε σειρά, και (β) παράλληλα.

(Υπόδειξη: στη σύνδεση σε σειρά, τα πηνία διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I, και οι ΗΕΔ $E_1 = -L_1\dfrac{dI}{dt}$ και $E_2 = -L_2\dfrac{dI}{dt}$ που αναπτύσσονται όταν το ρεύμα μεταβάλλεται προστίθενται για να δώσουν την ΗΕΔ του συνδυασμού. Στην παράλληλη σύνδεση, τα πηνία διαρρέονται από διαφορετικά ρεύματα I_1 και I_2, έχουν την ίδια ΗΕΔ $E = -L_1\dfrac{dI_1}{dt} = -L_2\dfrac{dI_2}{dt}$ στα άκρα τους και το ολικό ρεύμα που διαρρέει τον συνδυασμό είναι το άθροισμα των δύο ρευμάτων).

Π. 42 Δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι λεπτοί αγωγοί εκτείνονται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις και διαρρέονται από ίσα ρεύματα με αντίθετες κατευθύνσεις (στην πραγματικότητα, οι αγωγοί αποτελούν τις δύο πλευρές ορθογώνιου παραλληλόγραμμου βρόχου, του οποίου οι άλλες δύο πλευρές βρίσκονται πολύ μακριά ώστε να μπορούν να αγνοηθούν). Οι αγωγοί απέχουν απόσταση $3a$ ο ένας από τον άλλο.

Συμμετρικά ανάμεσα στους αγωγούς, και στο επίπεδό τους, βρίσκεται αγώγιμος βρόχος σχήματος τετραγώνου πλευράς a. Οι δύο πλευρές του τετραγώνου είναι παράλληλες προς τους δύο αγωγούς.

Βρείτε το συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής του βρόχου και των δύο αγωγών.

(Υπενθύμιση: Αν ρεύμα I_1 στο βρόχο 1 προκαλεί μαγνητική ροή Φ_2 στο βρόχο 2, ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής των δύο βρόχων είναι $M = \Phi_2 / I_1$.)

Π.43 Συμπαγής κυλινδρικός αγωγός έχει ακτίνα a και εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα I, ομοιόμορφα κατανεμημένο στη διατομή του. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου υπάρχει πολύ λεπτό στρώμα αγώγιμου υλικού, μονωμένο από τον κυλινδρικό αγωγό, μέσα από το οποίο συνολικό ρεύμα I κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση, ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια.

(α) Δείξετε ότι μαγνητικό πεδίο υπάρχει μόνο στο εσωτερικό του κυλίνδρου, και βρείτε το μέγεθός του σε κάθε σημείο του χώρου.

(β) Υπολογίστε τη μαγνητική ενέργεια που αντιστοιχεί σε μήκος l του συστήματος. (Η πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας είναι $\frac{1}{2\mu_0}B^2$ ενέργεια ανά μονάδα όγκου, στο χώρο όπου το μαγνητικό πεδίο είναι B.)

(γ) Εξισώνοντας αυτή την ενέργεια με $\frac{1}{2}LI^2$, βρείτε την αυτεπαγωγή L μήκους l του συστήματος, και την αυτεπαγωγή του ανά μονάδα μήκους.

Π. 44 Δύο πολύ λεπτά αγώγιμα κυλινδρικά κελύφη έχουν ακτίνες a και b ($a < b$), και εκτείνονται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ο ένας αγωγός διαρρέεται από ρεύμα I, ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του, προς τη μια κατεύθυνση, και ο άλλος διαρρέεται από ρεύμα I, ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του, προς την άλλη κατεύθυνση.

(α) Δείξετε ότι μαγνητικό πεδίο υπάρχει μόνο στο χώρο ανάμεσα στα δύο κελύφη, και βρείτε το μέγεθός του, υποθέτοντας ότι η διαφορά ανάμεσα στα a και b είναι πολύ μικρή σε σχέση με αυτά, ώστε το μαγνητικό πεδίο στο χώρο μεταξύ των κυλινδρικών επιφανειών να έχει σταθερό μέτρο.

(β) Υπολογίστε τη μαγνητική ενέργεια που αντιστοιχεί σε μήκος l του συστήματος.

(Η πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας είναι $\frac{1}{2\mu_0}B^2$ ενέργεια ανά μονάδα όγκου, στο χώρο όπου το μαγνητικό πεδίο είναι B.)

(γ) Εξισώνοντας αυτή την ενέργεια με $\frac{1}{2}LI^2$, βρείτε την αυτεπαγωγή L μήκους l του συστήματος, και την αυτεπαγωγή του ανά μονάδα μήκους.

Συμβολή, περίθλαση.

Π. 45 Τρεις πανομοιότυπες πηγές, Α, Β και Γ, είναι διατεταγμένες, με αυτή τη σειρά, σε μια ευθεία και εκπέμπουν σε φάση ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ημιτονικής μορφής, μήκους κύματος λ και έντασης I_0. Οι αποστάσεις μεταξύ των πηγών είναι $AB = \lambda/2$ και $B\Gamma = \lambda$.

(α) Να βρεθεί η ένταση της ακτινοβολίας σε σημείο Ρ που βρίσκεται πάνω στην ίδια ευθεία με τις πηγές, προς τη μεριά της Γ, και απέχει από αυτήν απόσταση b.

(β) Κατά ποια τιμή δ_0 πρέπει να μεταβληθεί η φάση της πηγής Α ως προς τις πηγές Β και Γ για να είναι μέγιστη η ένταση στο σημείο Ρ και ποια θα είναι αυτή η ένταση;

Π. 46 Δύο πανομοιότυπες ραδιοφωνικές κεραίες απέχουν απόσταση 200 m η μία από την άλλη, και εκπέμπουν, σε φάση, ηλεκτρομαγνητικά κύματα ημιτονικής μορφής, συχνότητας 3 MHz.

(α) Να υπολογισθεί η ένταση του σήματος που προκύπτει από τη συμβολή των κυμάτων από τις δύο πηγές σε μεγάλες αποστάσεις από αυτές, ως συνάρτηση της γωνίας θ ως προς άξονα μεσοκάθετο στην ευθεία που ορίζουν. Η ένταση του σήματος από την καθεμιά κεραία στο σημείο που γίνεται η παρατήρηση είναι I_0.

(β) Να βρεθούν οι τιμές της γωνίας θ για τις οποίες η ένταση είναι μέγιστη.

Π. 47 Δύο πανομοιότυπες σημειακές πηγές Α και Β ακτινοβολούν σε μήκος κύματος λ, ημιτονικά ηλεκτρομαγνητικά σήματα. Οι πηγές απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με $\lambda/4$. Η πηγή Β υστερεί της Α σε φάση κατά γωνία $\delta_0 = \pi/2$.

Να βρεθεί η ένταση της ακτινοβολίας σε μια απόσταση d, πολύ μεγάλη σε σύγκριση με την απόσταση μεταξύ των δύο πηγών, συναρτήσει της γωνίας θ ως προς τη διεύθυνση που είναι κάθετη στην ΑΒ. Το πλάτος του σήματος από την κάθε πηγή στην απόσταση d είναι a.

Δίνεται: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Π. 48 (α) Το πείραμα των δύο σχισμών (του Young) πραγματοποιείται με φως νατρίου (λ=589 nm). Οι κροσσοί μετρούνται προσεκτικά πάνω σε ένα πέτασμα σε απόσταση 1,2 m από τη διπλή σχισμή, ενώ το κέντρο του 20ου φωτεινού κροσσού (ο κεντρικός κροσσός θεωρείται ως ο "μηδενικός") βρίσκεται 11,8 mm από το κέντρο του κεντρικού φωτεινού κροσσού. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σχισμών;

(β) Ποια θα ήταν η απάντηση αν το όλο σύστημα ήταν βυθισμένο σε υγρό δείκτη διάθλασης n=1,5; Μέσα στο υγρό, η συχνότητα του φωτός παραμένει η ίδια ενώ η ταχύτητά του και το μήκος κύματός του είναι μειωμένα κατά ένα παράγοντα n. Θεωρήστε ότι όλα τα άλλα δεδομένα του προβλήματος παραμένουν τα ίδια.

Π. 49 (α) Στο πείραμα των δύο σχισμών (του Young), οι δύο σχισμές απέχουν 0,300 mm μεταξύ τους και βρίσκονται σε απόσταση 60 cm από πέτασμα. Οι σχισμές φωτίζονται με φως μήκους κύματος λ=600 nm. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ της δεύτερης και της τρίτης σκοτεινής γραμμής στην εικόνα συμβολής;

(β) Ποια θα ήταν η απάντηση αν το όλο σύστημα ήταν βυθισμένο σε υγρό δείκτη διάθλασης n=1,5; Μέσα στο υγρό, η συχνότητα του φωτός παραμένει η ίδια ενώ η ταχύτητά του και το μήκος κύματός του είναι μειωμένα κατά ένα παράγοντα n. Θεωρήστε ότι όλα τα άλλα δεδομένα του προβλήματος παραμένουν τα ίδια.

ΙΙ. 50 (α) Παράλληλες ακτίνες φωτός μήκους κύματος λ=600 nm προσπίπτουν σε διπλή σχισμή. Σε πέτασμα τοποθετημένο σε απόσταση 3 m από τις δύο σχισμές, η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών σκοτεινών κροσσών που παρατηρούνται είναι 3,60 mm. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των σχισμών;

(β) Ποια θα ήταν η απάντηση αν το όλο σύστημα ήταν βυθισμένο σε υγρό δείκτη διάθλασης n=1,5; Μέσα στο υγρό, η συχνότητα του φωτός παραμένει η ίδια ενώ η ταχύτητά του και το μήκος κύματός του είναι μειωμένα κατά ένα παράγοντα n. Θεωρήστε ότι όλα τα άλλα δεδομένα του προβλήματος παραμένουν τα ίδια.

Οπτική.

Π. 51 Δύο επιπεδόκυρτοι φακοί, Α και Β, είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο υλικό, με δείκτη διάθλασης n, και έχουν ακτίνες καμπυλότητας R_A και R_B αντίστοιχα.

(α) Βρείτε τις εστιακές τους αποστάσεις f_A και f_B.

(β) Αν οι δύο φακοί τοποθετηθούν έτσι ώστε οι επίπεδες επιφάνειές τους να εφάπτονται, ποια είναι η εστιακή απόσταση f_{AB} του φακού που προκύπτει;

(γ) Εκφράστε την f_{AB} συναρτήσει των f_A και f_B.

(δ) Η σχέση που βρέθηκε ισχύει για δύο οποιουσδήποτε λεπτούς φακούς που τοποθετούνται ο ένας κοντά στον άλλο. Η ποσότητα $P = 1/f$ ονομάζεται ισχύς του φακού. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει από το αποτέλεσμα (γ), για την ισχύ του συστήματος των δύο φακών;

(ε) Υπολογίστε τα f_A , f_B , f_{AB} , P_A , P_B , και P_{AB} για δύο επιπεδόκυρτους φακούς, Α και Β, από γυαλί δείκτη διάθλασης n=1,5 , οι οποίοι έχουν ακτίνες καμπυλότητας 10 και 20 cm αντίστοιχα.

Π. 52 (α) Αν, όταν ένα αντικείμενο απέχει απόσταση a από ένα φακό, ο φακός σχηματίζει το είδωλό του σε απόσταση b, δείξετε ότι: αν η απόσταση ενός αντικειμένου είναι b, η απόσταση του ειδώλου του από τον φακό θα είναι a.

(β) Υπάρχει μια τιμή s_0 της απόστασης του αντικειμένου, για την οποία το είδωλο απέχει την ίδια απόσταση από το φακό. Εκφράστε την τιμή αυτή συναρτήσει της εστιακής απόστασης f του φακού.

(γ) Αμφίκυρτος φακός από γυαλί με δείκτη διάθλασης n=1,5 , έχει ακτίνες καμπυλότητας 10 και 20 cm. Υπολογίστε την εστιακή του απόσταση f. Ποια είναι η απόσταση s_0 γι' αυτόν το φακό;

Π. 53 (α) Αν ένα αντικείμενο απέχει απόσταση $s = x + f$ από ένα φακό εστιακής απόστασης f, βρείτε την απόσταση s' του ειδώλου του από το φακό, συναρτήσει των x και f. Αν $s' = x' + f$, βρείτε επίσης την απόσταση x'.

Αποδείξετε τον τύπο του Νεύτωνα για τους φακούς: $xx' = f^2$.

(Οι x και x' είναι οι αποστάσεις του αντικειμένου και του ειδώλου του από τις δύο εστίες του φακού. Με την απαιτούμενη προσοχή στα πρόσημα, ο τύπος ισχύει για όλους τους φακούς.)

(β) Αμφίκυρτος φακός από γυαλί με δείκτη διάθλασης n=1,5 , έχει ακτίνες καμπυλότητας 10 και 5 cm. Υπολογίστε την εστιακή του απόσταση f.

(γ) Αν ένα αντικείμενο τοποθετηθεί σε απόσταση s=10 cm από το φακό του (β), βρείτε την απόσταση s' του ειδώλου από το φακό. Βρείτε επίσης τα x και x', και δείξετε ότι ισχύει ο τύπος του Νεύτωνα.

Π. 54 Δύο λεπτοί φακοί τοποθετούνται σε επαφή ο ένας με τον άλλο, και έτσι ώστε οι άξονές τους να συμπίπτουν. Οι εστιακές αποστάσεις των φακών είναι f_1 και f_2. Δείξετε ότι η εστιακή απόσταση f του συστήματος των δύο φακών μαζί, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} .$$

Υπόδειξη: Υποθέστε ότι ένα αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση s από τον πρώτο φακό και βρείτε την απόσταση στην οποία αυτός θα σχημάτιζε το είδωλό του. Δίνοντας προσοχή στο πρόσημο, θεωρήστε ότι το είδωλο αυτό δρα ως αντικείμενο για το δεύτερο φακό και βρείτε την απόσταση s' του ειδώλου του από το σύστημα των φακών. Η εστιακή απόσταση του συστήματος προκύπτει τότε από τη σχέση $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$.